1 Квантовый гармонический осциллятор

Гармоническим осциллятором (г.о.) называется шарик массой m, подвешенный на пружинке жесткости k.

1. Написать оператор энергии H г.о. используя закон Гука $F = -kx$ и определение силы через потенциал $F = -\nabla V$. (Указание: $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}$).

2. Решить классическое уравнение динамики для г.о., найти частоту колебаний ω и написать H через ω. (Указание: $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$).

3. Привести гамильтониан г.о. к виду

$$H = \hbar\omega H_0,\ H_0 = \frac{1}{2}(X^2 + P^2) \tag{1.1}$$

для подходящих операторов X, P, и найти $[X, P]$. (Указание: $X = \sqrt{m\omega/\hbar}x,\ P = \frac{p}{\sqrt{m\hbar\omega}},\ [X, P] = i$.

4. Определим операторы

$$a = \frac{X + iP}{\sqrt{2}},\ a^+ = \frac{X - iP}{\sqrt{2}}. \tag{1.2}$$

Найти $[a, a^+]$ и выразить H_0 через них. (Указание: $[\alpha, a^+] = 1,\ H_0 = a^+a + \frac{1}{2}$.

5. Доказать, что если $|\phi_1\rangle$ - собственный вектор H_1 с собственным значением c_1, то $a^+|\phi_1\rangle$ - собственный вектор H_1 с собственным значением $c_1 + 1$, а если $a|\phi_1\rangle \neq 0$, то $a|\phi_1\rangle$ - собственный вектор H_1 с собственным значением $c_1 - 1$.

6. Найти собственное состояние H с собственным значением $\hbar\omega/2$, решив задачу на собственные значения H. Это состояние обозначается через $|0\rangle$ и называется вакуумным. Указание: решение искать в виде гауссиана. Ответ:

$$|0\rangle = (m\omega/\pi\hbar)^{1/4} e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2} \tag{1.3}$$

7. Доказать, что $a|0\rangle = 0$ и $|0\rangle$ - единственное состояние с таким свойством. (Указание: импользовать теорему о существовании и единственности решения задачи Коши).

8. Используя тот факт, что спектр гамильтониана H ограничен снизу, доказать, что он а) имеет вид $\frac{\hbar\omega}{2} + n\hbar\omega$ при $n = 0, 1, ...$, б) невырожден. Использовать результаты задач 5 и 7.

9. Обозначим через $|n\rangle$ собственное состояние H с собственным значением $\frac{\hbar\omega}{2} + n\hbar\omega$ и единичной нормой. Найти закон действия операторов a, a^+ и a^+a на $|n\rangle$. Указание: использовать результат задачи 4. Ответ:

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle,\ a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle,\ a^+a|n\rangle = n|n\rangle \tag{1.4}$$

Задача 9 дает основание назвать операторы $a,\ a^+,\ a^+a$ операторами уничтожения кванта возбуждения, рождения кванта возбуждения и числа квантов возбуждения г.о. соответственно.

Модой электромагнитного поля называется частота и направление распространения кванта поля - фотона, а также его поляризация (направление его электрического поля). Из уравнений Максвелла вытекает, что если зафиксировать какую-то моду, классическая динамика поля описывается гармоническим осциллятором на данной частоте. Таким образом, при квантовом описании поля в данной моде состояния поля будут различаться только по числу n фотонов данной моды, а общий вид одномодового состояния будет иметь вид $|\Psi_{one\ mode}\rangle = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda_n |n\rangle$.