

# Задачи по спецкурсу "Введение в квантовую механику"

1. Доказать, что квантовые операторы координаты, импульса, кинетической и потенциальной энергии - эрмитовы.
2. Установить точный вид дискретного представления оператора координаты и оператора потенциальной энергии в базисе, состоящем из собственных векторов оператора координаты.
3. Установить коммутационные соотношения между матрицами Паули, и их собственные векторы и собственные числа. Будут ли матрицы Паули эрмитовыми? Унитарными?
4. Можно ли одновременно измерить с абсолютной точностью значения координаты и импульса? Дать обоснованный ответ.
5. Можно ли одновременно измерить с абсолютной точностью значение первой и второй компонент оператора момента импульса? Дать обоснованный ответ.
6. Можно ли одновременно измерить с абсолютной точностью кинетическую энергию и первую компоненту момента импульса? Дать обоснованный ответ.
7. Энтропия классической системы всегда увеличивается при добавлении в систему новых элементов. Будет ли это справедливым для квантовой системы? Указание: рассмотреть ЭПР состояние двух кубитов вида  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$  и взять первый кубит в качестве исходной системы, а двухкубитную систему - как расширение.
8. Придумать схему эксперимента, отличающего ЭПР пару  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$  от равновесной смеси  $|00\rangle$  и  $|11\rangle$  с вероятностями  $1/2$ . Обобщить найденный метод на самый общий случай: эксперимент, отличающий смешанные состояния  $n$ -кубитной системы с различными матрицами плотности. Указание: рассмотреть измерения в разных базисах; этот прием называется квантовой томографией. Как зависит алгоритмическая сложность квантовой томографии от числа кубитов в системе?
- 9\*\*. При каких условиях квантовая энтропия фон Неймана переходит в классическую энтропию Шеннона? Дать интерпретацию квантовой энтропии в терминах числа классических битов, значения которых можно передать от Алисы к Бобу, используя квантовые состояния с данной энтропией. Указание: использовать классическую аналогию: энтропия как мера неопределенности.
10. Написать уравнение Шредингера для одного кубита. Найти его общее решение при заданном начальном условии. Дать развернутую физическую интерпретацию полученного результата, используя модель кубита как частицы, находящейся в двух-ямном потенциале.
11. Будут ли собственные состояния операторов координаты и импульса нормируемыми? Дать математически точное определение собственных функций оператора координаты. Можно ли дифференцировать такие функции, и если да, то как именно? Как работать с ненормируемыми векторами при квантовых расчетах? Как вводить скалярное произведение для таких векторов? Как раскладывать произвольное состояние по базису, состоящему из ненормируемых векторов? Дать развернутый ответ.
12. Будет ли запутывающим двух-кубитный оператор CNOT? Тот же вопрос про оператор CSign:  $|x, y\rangle \rightarrow (-1)^{xy}|x, y\rangle$ . Можно ли выразить один из этих операторов через другой, используя также и однокубитные унитарные операторы?
13. Найти общий вид унитарного оператора над одним кубитом. Выразить произвольный однокубитный эрмитов оператор через матрицы Паули. Верно ли, что однокубитные эрмитовы операторы образуют алгебру Ли над полем комплексных чисел? Если да, то какова ее размерность?
14. Что такое квантовый алгоритм? Что такое квантовое вычисление? Что такое классический оракул и как его использовать в классических вычислениях? Что такое квантовый оракул и чем он отличается от классического? Что такое квантовое вычисление с оракулом? Что такое быстрый квантовый алгоритм? Привести пример быстрого квантового алгоритма.
- 15\*\*. Как теоретически реализовать CNOT, используя 2 электрона, находящиеся в двух квантовых точках, каждая из которых имеет вид двух-ямного потенциала. Указание: Использовать а) кулоновское

взаимодействие между электронами для управления высотой потенциального барьера в управляемом кубите, б) возможность управления высотой потенциального барьера для управляющего кубита с помощью внешнего потенциала. Почему эта схема не реализована в эксперименте? Указание: рассмотреть процесс декогерентности для таких электронов.

16\*\*. Можно ли выразить оператор Тоффולי  $|x, y, z\rangle \rightarrow |x, y, z \oplus xy\rangle$  через CNOT и однокубитные гейты? Указание: ответ положительный.

17\*. Верно ли, что любой незапутывающий двух кубитный унитарный оператор имеет вид  $A \otimes B$ ? Указание: ответ отрицательный, приведите контрпример и напишите матрицу этого оператора. Как реализовать его физически?

18. Доказать, что квантовое преобразование Фурье унитарно.

19\*. Доказать, что квантовое преобразование Фурье с точностью до линейного преобразования над координатой  $x$  является дискретной формой непрерывного преобразования Фурье в бесконечномерном пространстве квантовых состояний одномерной точечной частицы. Как использовать этот факт при моделировании оператора кинетической энергии на квантовом компьютере? Указание: Использовать тот факт, что преобразование Фурье переводит операцию дифференцирования в операцию умножения на аргумент исходной функции и на мнимую единицу.

20\*\*\*. Используя результат предыдущей задачи, показать, что на квантовом компьютере можно моделировать унитарную эволюцию одной частицы в потенциале  $V(r)$ , который вычисляется достаточно простым алгоритмом. Указание: сначала получить формулу Троттера  $\exp(A+B) \approx (\exp(A/n)\exp(B/n))^n$ , справедливую с точностью до  $1/n^2$ ; она получается, если разложить экспоненту до 2 члена. Затем применить данную формулу для оператора унитарной эволюции, выделив потенциальную и кинетическую энергию в разных экспонентах, выбирая малый промежуток времени  $\delta t$ . Наконец, применить квантовое преобразование Фурье для приведения оператора, соответствующего кинетической энергии, к простому диагональному виду.

21\*\*\*. Какая память квантового компьютера требуется для моделирования в предыдущей задаче? Какое время занимает моделирование по сравнению с реальным временем в моделируемой системе? Указание: в последнем вопросе надо оценить точность моделирования в зависимости от  $\delta t$ ; время модели будет расти квадратично с ростом реального времени.

22. В чем трудность реализации квантового компьютера? Что такое декогерентность и как можно ее преодолеть? Привести примеры однокубитных состояний, сохраняющихся неограниченно долгое время в унитарной эволюции одного кубита (см. задачу 10).

23. Что такое интеграл по траекториям Фейнмана? Написать выражение для унитарной эволюции в терминах интеграла по траекториям.

24\*\*. Написать критерий перехода к квантовой механике от классической в терминах характерного действия. Указание: Использовать интеграл по путям, а также тот факт, что вариация действия на классической траектории равна нулю. В каких задачах необходимо применять квантовую механику, а в каких достаточно классической? Дать развернутый ответ и привести примеры.

25\*\*. Оценить время жизни частицы в потенциальной яме конечной глубины. Указание: использовать яму простой формы, например, гауссову. К каким объектам можно применить полученный результат?

26. Сформулировать закон сохранения энергии в квантовом варианте. Сформулировать закон сохранения импульса и момента импульса в квантовом варианте для свободной частицы и для частицы в поле центрального потенциала. Можно ли решить задачу химической ассоциации, используя только квантовую механику одной частицы в потенциале? Дать развернутый ответ на примере ассоциации протона с электроном.